Teoría de Juegos

Juegos dinámicos con Información incompleta

Alejandro Lugon

Departamento de Economía
PUCP

alugon@pucp.edu.pe

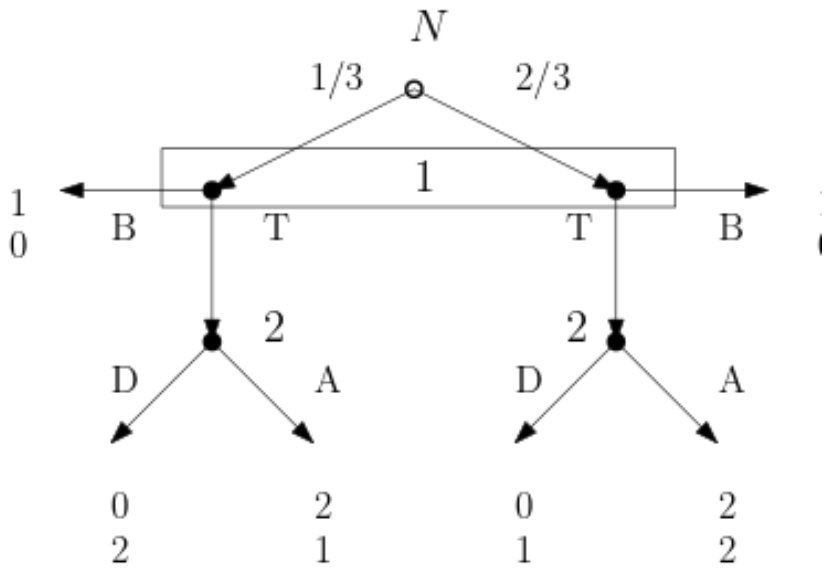
2023-1

Teoría de Juegos
Juegos dinámicos con Información incompleta

- Juegos dinámicos con Información incompleta
  - Introducción
- Juegos de Señalización
  - Introducción
  - Marco General
  - Ejemplo
  - Aplicación 1 : La educación como señal.
  - Aplicación 2 : Venta/Subasta Online

- Los juegos dinámicos con información imperfecta pueden ser tratados igual que los estáticos usando la transformación de Harsanyi.

⊙ Lo que sucede es que algunos equilibrios Bayesianos de Nash en este caso pueden involucrar acciones, planeadas fuera del desarrollo del juego, no muy "esperables".

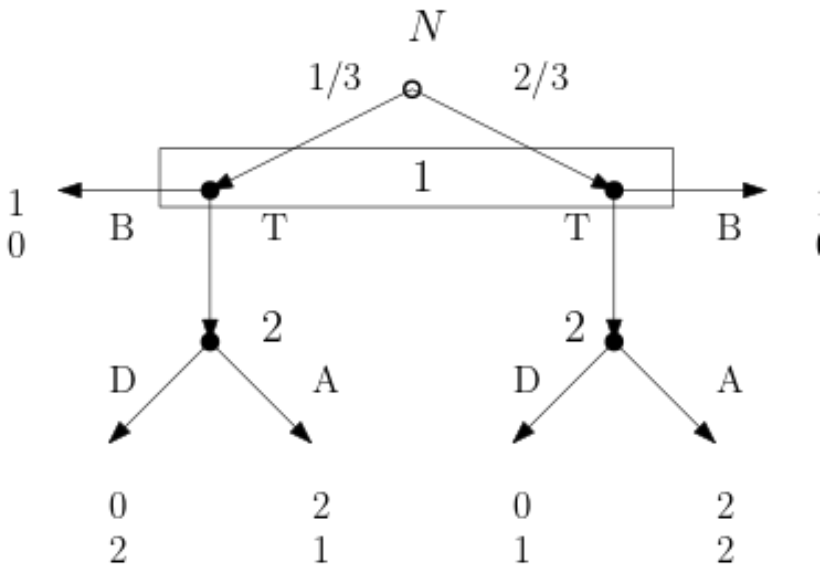


$\wr$

	DD	DA	AD	AA
B	$1, 0$	$1, 0$	$1, 0$	$1, 0$
T	$0, 4/3$	$4/3, 2$	$2/3, 1$	$2, 5/3$

- Tenemos 3 EBN: (B, DD), (B, AD) y (T, DA).

- Es necesario "refinar" el concepto de equilibrio, pedir propiedades adicionales: PSJ, ESd, ES o EBP. ¿



⊙ Tenemos 3 EBN: (B, DD), (B, AD) y (T, DA), solo (T, DA) es ESd y ENPSJ

- Veremos un tipo particular de juegos Dinámicos con Información Incompleta, los juegos de señalización.

⊙ Estos son juegos entre dos jugadores en los cuales la única acción no observada es la de la naturaleza al inicio del juego.

⊙ Esta acción de la naturaleza es la única fuente de información incompleta.

⊙ Para estos juegos el concepto de Equilibro Bayesiano Perfecto coincide con el de ESd.

⊙ Aún así, este concepto de solución necesita refinamientos mayores.

Marco General:

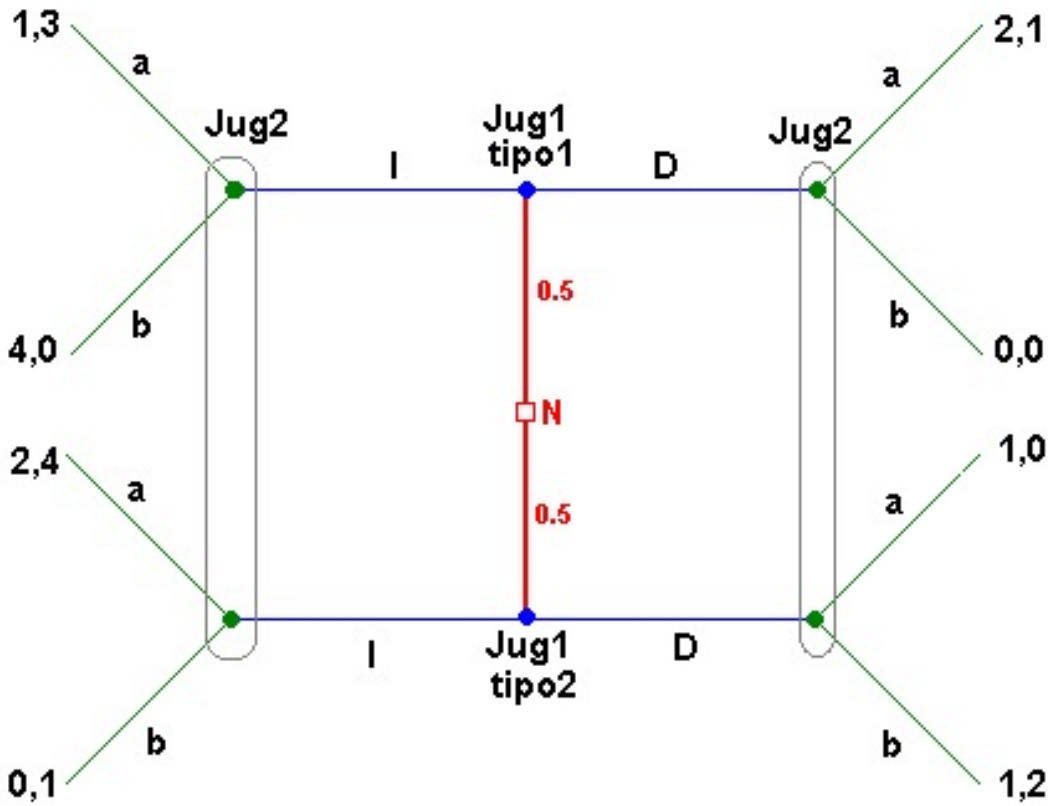
- La naturaleza escoge el tipo de un jugador, el emisor: $t_i \in T = \{t_1, t_2, \ldots t_I\}$
- Este jugador puede emitir una señal sea cual sea su tipo: $m_j \in M = \{m_1, m_2, \ldots, m_J\}$
- El otro jugador, receptor, no observa el tipo pero si la señal y realiza la acción final del juego: $a_k \in A = \{a_1, a_2, \ldots, a_K\}$
- Se realizan los pagos $\Pi_s(t_i, m_j, a_k)$

Juego de señalización

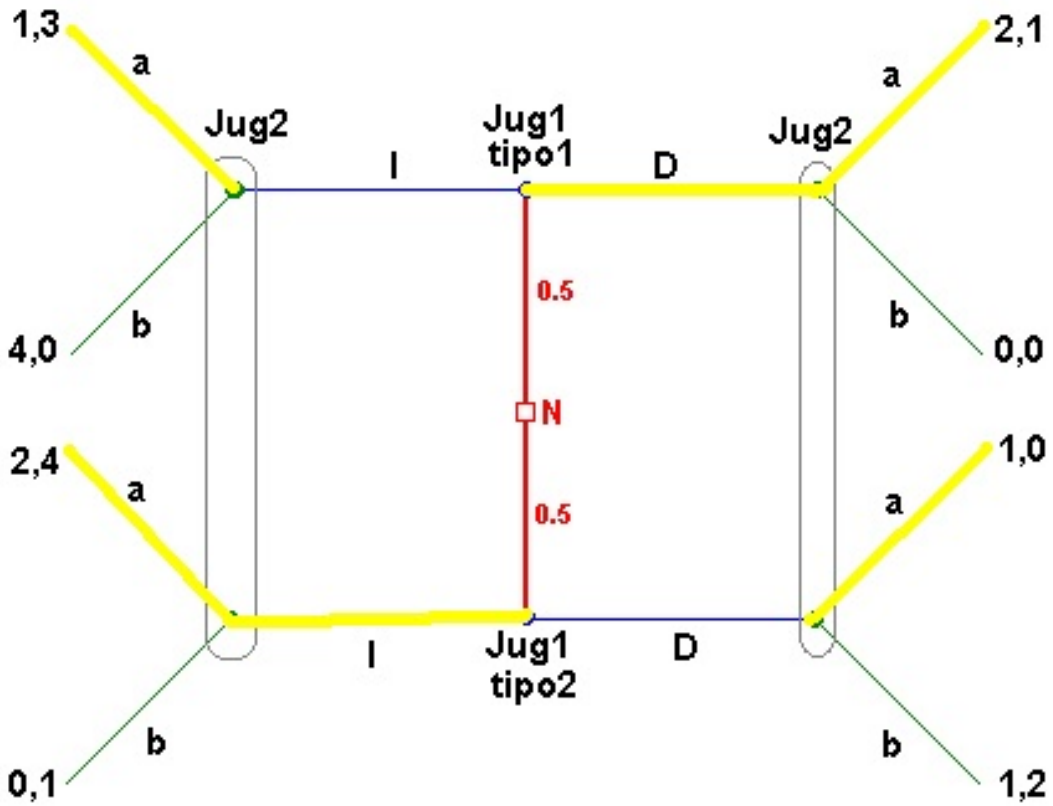
- Equilibrio de Nash Bayesiano Perfecto:
  - Ambos jugadores conocen las probabilidades con las que la Naturaleza escoge los tipos
  - El receptor actualiza estas probabilidades usando Bayes donde se pueda.
  - La acción de cada jugador es óptima de acuerdo a sus conjeturas y a las jugadas de los otros jugadores

⊙ Considerando solo estrategias puras los EBN pueden ser separadores o agrupadores.

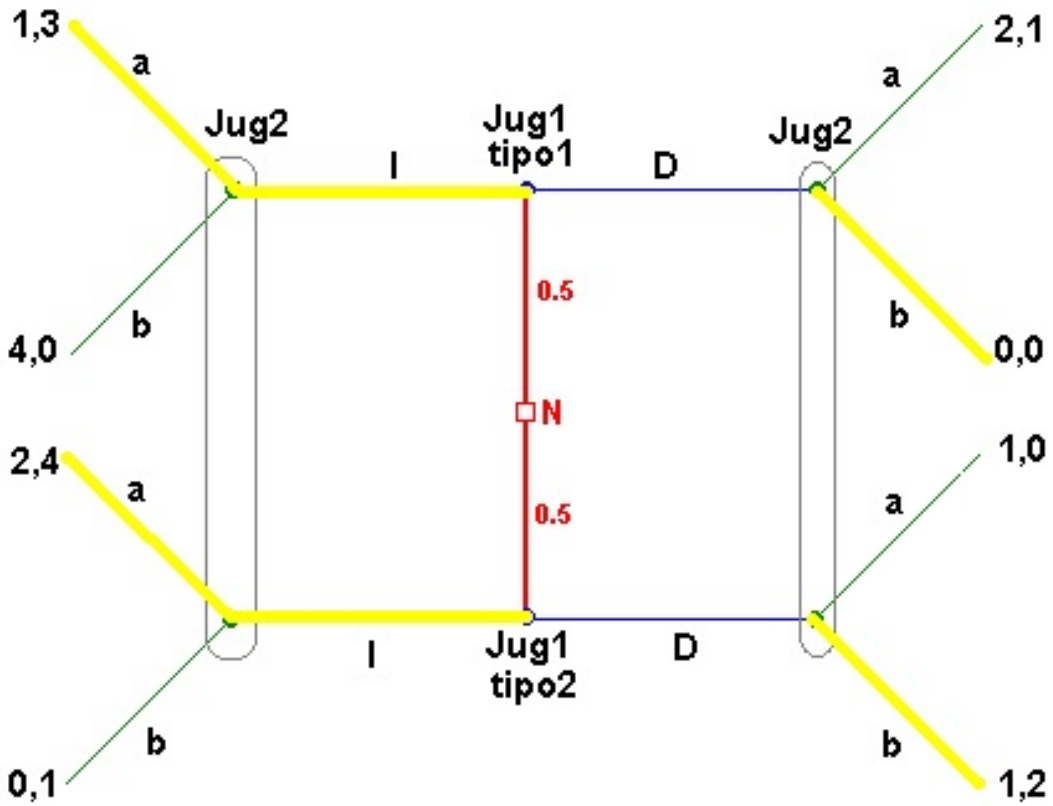
Juego de señalización



Juego de señalización Equilibrio separador



Juego de señalización Equilibrio agrupador



La educación como señal

Spence (1973) "Job Market Signaling":

- El J1 es un trabajador con una productividad innata p, que puede ser alta p_a o baja p_b ($p_b < p_a$), de acuerdo a lo determinado por la Naturaleza.
- El J1 elige su nivel de estudios e a un costo $C(e, p)$
- EL J1 pide un salario de w
- El J2 es un empleador que observa el nivel de estudios y el salario w (pero no la productividad)
- El J2 acepta o rechaza la petición del J1

La educación como señal

Asumiremos:

- La probabilidad de que J1 sea de productividad alta es q y de productividad baja $1 - q$
- El nivel de educación e es un número entre 0 y 1
- Si el J2 contrata a J1 de productividad p por un salario w gana $p - w$, si no lo contrata gana 0
- Si el J1 de productividad p_a y nivel de estudios e trabaja por un salario w gana $w - e$, si no gana 0
- Si el J1 de productividad p_b y nivel de estudios e trabaja por un salario w gana $w - ke$ (con $k > 1$), si no gana 0.

La educación como señal

- Pensemos primero en el caso en que la productividad es observada.
- Por inducción hacia atrás:
  - J2 acepta cualquier $w \leq p$ y rechaza $w > p$
  - J1 de productividad p_a elige $e = 0$ y pide $w = p_a$
  - J1 de productividad p_b elige $e = 0$ y pide $w = p_b$
- Los pagos son:
  - J2 tiene pago cero siempre, en esperado cero.
  - J1 de productividad p_a tiene pago p_a
  - J1 de productividad p_b tiene pago p_b

La educación como señal

- Pensemos ahora en el caso en que la productividad no es observada y no existe la posibilidad de educación.
  - Si J2 acepta algunos w y rechaza otros, todos los J1 pedirán el w aceptado más alto.
  - J2 debe creer que los que piden dicho w son de productividad alta con probabilidad q y de productividad baja con probabilidad $1-q$
  - J2 debe entonces aceptar cualquier $w \leq qp_a + (1-q)p_b$ y rechazar cualquier otro.
  - Todos los J1 piden $w = qp_a + (1-q)p_b = \bar{p}$
- Los pagos son:
  - J2 tiene pago esperado cero.
  - J1 de productividad p_a tiene pago $\bar{p} < p_a$
  - J1 de productividad p_b tiene pago $\bar{p} > p_b$

La educación como señal

Ahora veamos el caso completo, analizando primero un

Equilibrio agrupador:

1. Todos los trabajadores eligen $e = 0$ y piden $w = \bar{p}$.
2. Si el empleador observa $e = 0$ con $w = \bar{p}$ cree que el trabajador es de productividad alta con probabilidad q y de productividad baja con probabilidad $1 - q$ y acepta.
3. Si el empleador observa $e \neq 0$ o $w \neq \bar{p}$ cree que el trabajador es de productividad baja y acepta si $w - p_b \leq 0$ y rechaza en caso contrario.

Las creencias fuera del equilibrio no son muy "intuitivas"

La educación como señal

Equilibrio separador:

Unas creencias mas aceptables para el J2 son:

- Si observa $e \geq e^*$ con $w \leq p_a$ cree que el J1 es de productividad alta
- Si observa $e < e^*$ con $w \leq p_b$ cree que el J1 es de productividad baja
- En todos los otros casos cree que el J1 es de productividad baja y acepta si $w - p_b \leq 0$ y rechaza en caso contrario.

de acuerdo a esto el J2 debe:

- Si observa $e \geq e^*$ con $w \leq p_a$, aceptar.
- Si observa $e < e^*$ con $w \leq p_b$, aceptar
- En todos los otros casos, aceptar si $w - p_b \leq 0$ y rechazar en caso contrario.

La educación como señal

Equilibrio separador:

- Con esas creencias las dos posibles acciones óptimas del J1 son:
  - $e = e^*$ con $w = p_a$
  - $e = 0$ con $w = p_b$
- Con estas acciones ninguno gana desviándose a estrategias que no sean las del otro.
- A un J1 de productividad alta no le conviene "hacerse pasar" por uno de productividad baja si:

$$p_a - e^* \geq p_b$$

- A un J1 de productividad baja no le conviene "hacerse pasar" por uno de productividad alta si:

$$p_b \geq p_a - ke^*$$

La educación como señal

Equilibrio separador:

Luego para:

$$\frac{p_a - p_b}{k} \leq e^* \leq p_a - p_b$$

tenemos un equilibrio separador donde lo observado es:

- J1 de productividad alta se educa al nivel e^* y es contratado a un salario $w = p_a$ y gana $p_a - e^*$
- J1 de productividad baja no se educa $(e = 0)$ y es contratado a un salario $w = p_b$ y gana p_b

Venta/Subasta Online

- Un vendedor posee un objeto que puede ser Bueno (B) o Malo (M), que para él vale cero. La probabilidad de ser B es q
  - El vendedor puede publicar: soy B o soy M
  - El comprador (varios compradores compitiendo) no observan la calidad real sino la publicada.
  - Todos los compradores valoran la calidad $v(B) > v(M) > 0$
  - El comprador paga el valor esperado de acuerdo a sus creencias.
  - El pago del vendedor es el precio recibido.
- El pago del comprador es el valor real del objeto menos el precio pagado.

Venta/Subasta Online

- Si la señal no es costosa ("cheap talk") el único equilibrio es que ambos tipos publiquen B.

⊙ Los compradores si observan M asignan probabilidad 1 a ser M y pagan $v(M)$.

⊙ Si observan B asignan probabilidad q a ser B y pagan $qv(B) + (1 - q)v(M)$

⊙ No hay equilibrio separador.

Venta/Subasta Online

- Si publicar de manera no honesta cuesta c.

⊙ Veamos si hay un equilibrio separador con cada tipo publicando honestamente.

⊙ En ese caso los compradores asignan probabilidad 1 a B si observan B y cero si observan M.

⊙ Los compradores pagan $v(B)$ si observan B y $v(M)$ si observan M

⊙ El vendedor de un objeto B no tiene incentivo a publicar otra cosas.

⊙ EL vendedor de un objeto M tampoco tiene incentivo a publicar deshonestamente si $v(M) \geq V(B) - c$ es decir si

$$c \geq v(B) - v(M)$$